

0 7 2 3 4 9 0 - 1

На правах рукописи

Крицкий Олег Леонидович

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ  
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

05.13.18 – математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА КГУ



0000374318

Красноярск - 2001

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'Крицкий'.

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики и компьютерного моделирования в Томском государственном университете.

Научный руководитель:

- кандидат физико-математических наук,  
доцент Берцун В.Н.

Научный консультант:

- доктор физико-математических наук,  
профессор Быков В.И.

Официальные оппоненты:

- доктор физико-математических наук,  
профессор Добронев В.И.
- доктор физико-математических наук,  
доцент Богульский И.О.

Ведущая организация: Институт Вычислительных Технологий СО РАН (г. Новосибирск).

Защита состоится 9 ноября 2001 г. в 14 час 00 мин. на заседании специализированного Совета Д 212.098.04 в Красноярском государственном техническом университете.

Отзывы на автореферат диссертации в двух экземплярах с подписью составителя, заверенные печатью организации, просим высылать по адресу: 660074, Красноярск, ул. Акад. Киренского, 26, ученому секретарю диссертационного совета Д 212.098.04

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке КГТУ.

Автореферат разослан " 6 " *сентября* 2001 г.

Ученый секретарь

специализированного Совета Д 212.098.04,  
доктор технических наук, профессор

*А.Н. Ловчиков* Ловчиков А.Н.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Математическое моделирование тепловых полей в анизотропных композиционных материалах, превосходящих по своим параметрам металлы и сплавы, является актуальной задачей для современной техники. Их широкое распространение обуславливает развитие соответствующего математического аппарата, однако влияние анизотропии на тепловые поля изучено недостаточно.

В настоящее время для численного решения многомерных параболических уравнений общего вида чаще всего используют прямые методы, такие как метод дробных шагов или слабой аппроксимации. Тем не менее, их применение затруднено из-за сложности адекватного учета граничных условий общего вида и трудности получения абсолютно устойчивой разностной схемы на каждом шаге по времени.

Для решения систем линейных алгебраических уравнений высокого порядка с разреженными матрицами специальной структуры, возникающих из сеточных аппроксимаций многомерных краевых задач, эффективным средством стали итерационные алгоритмы. Их главными достоинствами являются высокая практическая экономичность и широкие возможности конструирования адаптивных алгоритмов для различных классов уравнений.

Построению итерационных алгоритмов посвящено большое количество работ, однако вопросы их использования для расчетов нестационарных уравнений анизотропной теплопроводности с граничными условиями третьего рода, а так же конструирования быстросходящихся итерационных процессов являются малоизученными и практически важными.

Целью работы является математическое моделирование теплового состояния анизотропных сред, которое включает разработку алгоритма численного решения нестационарной краевой задачи теплопроводности общего вида, записанной в двух- и трехмерной области, доказательство сходимости и устойчивости построенного метода в рамках модели, а так же выявление класса параболических уравнений, для которых применение этого метода высокоэффективно.

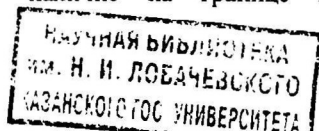
Научная новизна состоит в следующем:

- в модификации двумерного стационарного итерационного метода на нестационарный случай для расчета параболического уравнения с постоянными теплофизическими характеристиками с учетом анизотропии области. Модификация заключалась в обобщении известных в литературе формул ведения нелинейных итераций прогоночных коэффициентов на нестационарный случай, в записи краевых условий третьего рода с учетом анизотропии расчетной области и в аппроксимации их с повышенным порядком по пространству;
- в разработке эффективного трехмерного нестационарного итерационного алгоритма;
- в получении условий и доказательстве сходимости, устойчивости построенных итерационных процессов, а так же в разработке ряда вычислительных процедур, повышающих их эффективность при численной реализации;
- в выявлении оптимальных по скорости сходимости и количеству итераций областей применения вышеуказанных алгоритмов;

Достоверность полученных результатов обеспечена строгой математической постановкой, определяется теоретически доказанными положениями метода, подтверждается численными экспериментами по оценке сходимости, сравнением результатов расчетов с аналитическими решениями, с результатами, полученными другими методами, а так же проверкой поведения найденного решения на последовательности сгущающихся сеток.

На защиту выносятся: многомерные алгоритмы нелинейных итераций прогоночных коэффициентов, примененные для решения девятиточечных, девятнадцатиточечных и двадцатисемиточечных разностных систем уравнений; технология организации вычислительного процесса и построения итерационных процедур для модифицированного и обобщенного « $\alpha - \beta$ » алгоритма; доказательство сходимости и устойчивости этих методов; исследование влияния степени анизотропии расчетной области на скорость сходимости.

Теоретическая ценность работы: построен новый и модифицирован известный нелинейный итерационный процесс, в которых учтено наличие на границе внешней нормальной





производной от функции температуры. Они позволяют проводить расчет тепловых полей в двухмерных и трехмерных анизотропных областях. Сконструированные алгоритмы записаны в матричном виде, доказана их сходимость и устойчивость.

Практическая ценность работы заключается в том, что полученные результаты и разработанные методики могут быть использованы при выборе численного метода решения многомерных нестационарных задач анизотропной теплопроводности с краевыми условиями третьего рода. С помощью рассмотренных в работе итерационных алгоритмов могут быть определены тепловые поля в двух- и трехмерных анизотропных средах. Как следствие, могут быть найдены оптимальные по глубине их прогрева значения коэффициентов тензора теплопроводности, что позволяет заранее прогнозировать свойства анизотропных материалов и использовать указанные программы для проведения опытно-конструкторских разработок.

Реализация и внедрение: результаты работы (программная реализация двух- и трехмерного алгоритма нелинейных итераций прогночных коэффициентов) внедрены в ООО «Экономфизика–Томск».

Апробация работы. Результаты проведенных исследований докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- на международной конференции "Третий Сибирский конгресс по индустриальной и прикладной математике (ИНПРИМ-98), посвященный памяти С.Л. Соболева (1908 - 1989 гг.)" (ИМ СО РАН, Академгородок, г. Новосибирск, 1998 г.),
- на межрегиональной конференции "Исследования по анализу и алгебре" (ТГУ, г. Томск, 1998 г.),
- на Второй Сибирской школе-семинаре "Математические проблемы механики сплошных сред" (ИГЛ СО РАН, Академгородок, г. Новосибирск, 1998 г.),
- на научно-практической конференции "Сибирская школа молодого ученого" (ТГПУ, г. Томск, 1998 г.),
- на Третьем международном научно-техническом симпозиуме КОРУС - 99 (НГТУ, Академгородок, г. Новосибирск, 1999 г.),

- на Общероссийской научной конференции молодых ученых "Фундаментальные прикладные проблемы современной механики" (НИИПММ, г. Томск, 1999 г.),
- на Втором Всероссийском семинаре "Моделирование неравновесных систем" (Красноярск, Академгородок, ИВМ (ВЦ) СО РАН, 1999 г.),
- на Четвертом Минском международном форуме по тепло - и массообмену (Минск, Институт тепло - и массообмена им. А. В. Лыкова НАНБ, 2000 г.),
- на Третьем Всероссийском семинаре "Моделирование неравновесных систем-00" (Красноярск, Академгородок, ИВМ (ВЦ) СО РАН, 2000 г.),
- на конференции молодых ученых, посвященной 10-летию ИВТ СО РАН (Новосибирск, Академгородок, ИВТ СО РАН, 2000 г.),
- на международной конференции «Математические модели и методы их исследования» (Красноярск, КГУ, 2001 г.).

Основные результаты исследований были отмечены на следующих всероссийских и региональных конкурсах:

- конкурс научных работ студентов, аспирантов, молодых специалистов "Академического университета" 1998 года, посвященный 120 - летию университетского образования в Сибири и 50 - летию ММФ ТГУ;
- конкурс научных работ студентов и аспирантов ТГУ в области технической физики и баллистики, проводимый в рамках проекта "Система выявления и поддержки талантливой молодежи на основе интеграции фундаментальной науки и высшего образования" на базе "Академического университета" по итогам 1999 года.
- конкурс "Обеспечение участия талантливых молодых исследователей университетов в международных конференциях по фундаментальным проблемам математических и естественных наук" федеральной целевой программы "Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки на 1997 - 2000 годы", имеющей статус президентской программы (ФЦП "Интеграция");
- конкурс молодых ученых ТГУ 2000 г., проводимый в рамках проекта "Система выявления и поддержки талантливой

- молодежи на основе интеграции фундаментальной науки и высшего образования" на базе "Академического университета";
- конкурс «Поддержка обучения и стажировок наиболее способных студентов и аспирантов в российских научных школах мирового уровня» федеральной целевой программы "Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки на 2001 год", имеющей статус президентской программы (ФЦП "Интеграция").

Стажировка проходила в Институте Вычислительного Моделирования СО РАН (г. Красноярск) под руководством проф. Быкова Валерия Ивановича.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 работах автора, список которых помещен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, основных выводов по работе, библиографии и двух приложений. Работа изложена на 125 страницах машинописного текста, содержит 24 таблицы, 13 рисунков и список использованных источников из 86 наименований на 7 страницах.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе приведен анализ опубликованных в печати работ по решению нестационарных краевых задач теплопроводности в двух- и трехмерных анизотропных областях. Рассмотрены аналитические, прямые и итерационные методы, использованные для нахождения такого решения.

Анализ литературы показал высокую эффективность итерационных методов. Наиболее интересным из них с точки зрения построения алгоритма, высокой скорости сходимости и времени ведения расчетов является " $\alpha-\beta$ " алгоритм, обобщение и модификация которого представлены в диссертационной работе. Его применение для решения многомерных параболических уравнений предпочтительно, так как он сохраняет технологию алгоритма скалярной прогонки и не требует дополнительной информации о спектре разностного оператора.

Здесь же приведена общая математическая постановка нестационарной краевой задачи теплопроводности в областях с анизотропией, из которой следуют все постановки рассмотренных в

работе задач. Для произвольной криволинейной системы координат она будет иметь вид:

$$c_p \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{s=1}^3 \sum_{l=1}^3 k_{js} \cdot \frac{\sqrt{g}}{g_{sl}} \cdot \frac{\partial T}{\partial x_l} \right) + f(x, y, z, t),$$

$$- \sum_{s=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^3 n_j \cdot k_{js} \cdot g_{sl} \cdot \frac{\partial T}{\partial x_l} = \alpha(T - T_e),$$

где  $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix}$  – дважды ковариантный симметрический

метрический тензор.

Рассматриваются частные случаи декартовой, сферической, цилиндрической систем.

Во второй главе представлены результаты исследования модифицированного нелинейного "α-β" алгоритма, использованного для решения нестационарной краевой задачи теплопроводности в двумерной анизотропной области. Так же осуществляется построение итерационного метода, приводится его запись в матричном виде и решается вопрос о доказательстве устойчивости и сходимости. При этом двумерное уравнение

$$\Theta \cdot \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = k_{11} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2 \cdot k_{12} \cdot \frac{\partial T}{\partial x \partial y} + k_{22} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + f(x, y, t), \quad (1)$$

$$\left( k_{11} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + k_{12} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{x=0} = \gamma_1(T - T_e),$$

$$\left( k_{11} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + k_{12} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{x=a} = \gamma_2(T_e - T),$$

$$\left( k_{12} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + k_{22} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} = \gamma_3(T - T_e),$$

$$\left( k_{12} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + k_{22} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=b} = \gamma_4(T_e - T), \quad T|_{t=0} = u_0(x, y), \quad (2)$$

где  $T(x, y, t) \in C^2(\bar{U}_{[0,M]}) \cap C^1(\bar{U}_{[0,M]})$ ,  $U_{[0,M]} = G \times [0, M]$ ,  $\Theta = 0, 1$ ;  $G = (0, a) \times (0, b)$ ,  $k_{i,j}$ ,  $i = 1, 2$ ;  $j = 1, 2$ , – коэффициенты тензора теплопроводности, удовлетворяющие условию параболичности  $k_{11}k_{22} - k_{12}^2 \geq 0$ ;  $\rho$  – плотность;  $c_p$  – изобарная теплоемкость;  $T_e$  – температура внешней среды;  $\gamma_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , – коэффициенты теплоотдачи;  $T$  – температура, представляется в виде:

$$AU_{i-1,n-1}^k + BU_{i,n-1}^k + LU_{i+1,n-1}^k + KU_{i-1,n}^k - CU_{i,n}^k + \\ + EU_{i+1,n}^k + DU_{i-1,n+1}^k + VU_{i,n+1}^k + YU_{i+1,n+1}^k + F_{i,n}^{k-1} = 0, \quad (3)$$

$$A = k_{12}/(2h_1h_2), B = k_{22}/h_2^2, L = -A, K = k_{11}/h_1^2, E = K, Y = A, \\ D = L, V = B, C = 2 \cdot [B + K] + \Theta \cdot \rho \cdot c_p / \tau, h_1 = a \cdot N^{-1}, h_2 = b \cdot P^{-1}, \\ F_{i,n}^{k-1} = f_{i,n}^k + \Theta \cdot \rho \cdot c_p \cdot U_{i,n}^{k-1} / \tau, \tau = M \cdot M_1^{-1}, k = \overline{1, M_1}, i = \overline{2, N-1}, \\ n = \overline{2, P-1}, \tau - \text{шаг по времени.}$$

Разностное уравнение (3) дополняется граничными условиями, полученными аппроксимацией (2) с первым порядком:

$$U_{1,n}^k = \varphi_{2,n} U_{2,n}^k + \xi_{2,n}, U_{i,1}^k = \varphi_{i,2} U_{i,2}^k + \xi_{i,2}, \\ U_{N,n}^k = \varphi_{N-1,n} U_{N-1,n}^k + \xi_{N-1,n}, U_{i,P}^k = \varphi_{i,P-1} U_{i,P-1}^k + \xi_{i,P-1}, \quad (4)$$

где введены следующие обозначения:

$$\xi_{2,n} = \bar{\varphi}_{1,n+1} U_{1,n+1}^k + \bar{\xi}_{2,n}, \xi_{i,2} = \bar{\varphi}_{i+1,1} U_{i+1,1}^k + \bar{\xi}_{i,2}, \\ \xi_{N-1,n} = \bar{\varphi}_{N,n-1} U_{N,n-1}^k + \bar{\xi}_{N-1,n}, \xi_{i,P-1} = \bar{\varphi}_{i-1,P} U_{i-1,P}^k + \bar{\xi}_{i,P-1}.$$

Сеточные функции  $\bar{\varphi}, \bar{\xi}$  известны и определены только на границе.

Формулы итерационного алгоритма построены путем применения к (3) – (4) на каждом временном интервале формул правой и левой прогонки:

$$U_{i,n}^k = \alpha_{i+1,n} U_{i+1,n}^k + \beta_{i+1,n,k}, U_{i,n}^k = \bar{\alpha}_{i,n+1} U_{i,n+1}^k + \bar{\beta}_{i,n+1,k}; \quad (5)$$

$$U_{i,n}^k = \gamma_{i-1,n} U_{i-1,n}^k + d_{i-1,n,k}, U_{i,n}^k = \bar{\gamma}_{i,n-1} U_{i,n-1}^k + \bar{d}_{i,n-1,k}. \quad (6)$$

При нахождении  $U_{i,n}^{k+1}$  в качестве начального приближения итерационного алгоритма брались значения  $\beta_{i,n,k}, \bar{\beta}_{i,n,k}, d_{i,n,k}, \bar{d}_{i,n,k}$ , найденные на предыдущем временном слое.

Для сохранения второго порядка аппроксимации во всей сеточной области, а так же для ускорения сходимости метода граничные условия (2) аппроксимируются на пятиточечном шаблоне с погрешностью  $O(\tau, |h|^2)$ . С помощью соотношений (5), (6) полученное таким образом выражение удастся привести к виду, пригодному для разрешения скалярной прогонкой. При этом прогоночные коэффициенты будут зависеть от  $\alpha_{i,n}, \bar{\alpha}_{i,n}, \gamma_{i,n}, \bar{\gamma}_{i,n}, \beta_{i,n,k}, \bar{\beta}_{i,n,k}, d_{i,n,k}, \bar{d}_{i,n,k}$ .

Так как на границе отсутствуют некоторые уравнения, необходимые для корректного задания всех итерационных параметров, то осуществляются преобразования разностного уравнения (3), позволяющие обнулить некоторые числовые величины, стоящие при неизвестных.

Далее осуществляется запись модифицированного « $\alpha - \beta$ » алгоритма в матричном виде:

« $\alpha - \text{процесс}$ »

$$U_{\alpha}^{(0)} = 0; U_{\bar{\alpha}}^{(0)} = 0; U_{\gamma}^{(0)} = 0; U_{\bar{\gamma}}^{(0)} = 0;$$

$$\bar{U}_{\alpha}^{s+1/2} = (E \cdot I + L \cdot \bar{U}_{\alpha}^{s+1/2} + Y \cdot \bar{U}_{\gamma}^s) \cdot M_1,$$

$$M_1 = [C \cdot I - B \cdot \bar{U}_{\alpha}^{s+1/2} - V \cdot \bar{U}_{\gamma}^s - \bar{U}_{\alpha}^{s+1/2} (K \cdot I + A \cdot \bar{U}_{\alpha}^{s+1/2} + D \cdot \bar{U}_{\gamma}^s)]^{-1},$$

$$\bar{U}_{\gamma}^{s+1/2} = (K \cdot I + A \cdot \bar{U}_{\alpha}^{s+1/2} + D \cdot \bar{U}_{\gamma}^s) \cdot M_2,$$

$$M_2 = [C \cdot I - B \cdot \bar{U}_{\alpha}^{s+1/2} - V \cdot \bar{U}_{\gamma}^s - \bar{U}_{\gamma}^{s+1/2} (E \cdot I + L \cdot \bar{U}_{\alpha}^{s+1/2} + Y \cdot \bar{U}_{\gamma}^s)]^{-1},$$

$$\bar{U}_{\alpha}^{*,s+1/2} = (V \cdot I + D \cdot \bar{U}_{\alpha}^{*,s} + Y \cdot \bar{U}_{\gamma}^{*,s}) \cdot M_3,$$

$$M_3 = [C \cdot I - K \cdot \bar{U}_{\alpha}^{s+1/2} - E \cdot \bar{U}_{\gamma}^{s+1/2} - \bar{U}_{\alpha}^{s+1/2} (B \cdot I + A \cdot \bar{U}_{\alpha}^{*,s+1/2} + L \cdot \bar{U}_{\gamma}^{*,s+1/2})]^{-1}$$

$$\bar{U}_{\alpha}^{s+1} = (E \cdot I + L \cdot \bar{U}_{\alpha}^{s+1/2} + Y \cdot \bar{U}_{\gamma}^{s+1}) \cdot M_4,$$

$$M_4 = [C \cdot I - B \cdot \bar{U}_{\alpha}^{s+1/2} - V \cdot \bar{U}_{\gamma}^{s+1} - \bar{U}_{\alpha}^{s+1} (K \cdot I + A \cdot \bar{U}_{\alpha}^{s+1/2} + D \cdot \bar{U}_{\gamma}^{s+1})]^{-1},$$

$$\bar{U}_{\gamma}^{s+1} = (K \cdot I + A \cdot \bar{U}_{\alpha}^{s+1/2} + D \cdot \bar{U}_{\gamma}^{s+1}) \cdot M_5,$$

$$\begin{aligned}
M_5 &= \left[ C \cdot I - B \cdot \bar{U}_{\alpha}^{s+1/2} - V \cdot \bar{U}_{\gamma}^{s+1} - \bar{U}_{\gamma}^{s+1} \left( E \cdot I + L \cdot \hat{U}_{\alpha}^{s+1/2} + Y \cdot \hat{U}_{\gamma}^{s+1} \right) \right]^{-1}, \\
\tilde{U}_{\gamma}^{*,s+1} &= \left( B \cdot I + A \cdot \tilde{U}_{\alpha}^{*,s+1/2} + L \cdot \tilde{U}_{\gamma}^{*,s+1/2} \right) \cdot M_6, \\
M_6 &= \left[ C \cdot I - K \cdot \bar{U}_{\alpha}^{s+1} - E \cdot \bar{U}_{\gamma}^{s+1} - \bar{U}_{\gamma}^{s+1} \left( V \cdot I + D \cdot \hat{U}_{\alpha}^{*,s+1} + Y \cdot \hat{U}_{\gamma}^{*,s+1} \right) \right]^{-1},
\end{aligned}$$

« $\beta$  – процесс»

$$U_{\beta,k}^{(0)} = \begin{cases} U_0, & k=1 \\ U_{\beta,k-1}, & k \geq 2 \end{cases}, \quad U_{\bar{\beta},k}^{(0)} = \begin{cases} U_0, & k=1 \\ U_{\bar{\beta},k-1}, & k \geq 2 \end{cases},$$

$$U_{d,k}^{(0)} = \begin{cases} U_0, & k=1 \\ U_{d,k-1}, & k \geq 2 \end{cases}, \quad U_{\bar{d},k}^{(0)} = \begin{cases} U_0, & k=1 \\ U_{\bar{d},k-1}, & k \geq 2 \end{cases},$$

$$\bar{U}_{\beta}^{s+1/2} = \left( \Phi \cdot \bar{U}_{\beta}^{s+1/2} + M^{s+1/2} \right) \cdot \Psi^{-1},$$

$$M^{s+1/2} = D \cdot \tilde{U}_d^s + V \cdot \bar{U}_d^s + Y \cdot \hat{U}_d^s + A \cdot \tilde{U}_{\beta}^{s+1/2} + B \cdot \bar{U}_{\beta}^{s+1/2} + L \cdot \hat{U}_{\beta}^{s+1/2} + F,$$

$$\Phi = K \cdot I + A \cdot \tilde{U}_{\alpha} + D \cdot \tilde{U}_{\gamma}, \quad \Psi = C \cdot I - B \cdot \bar{U}_{\alpha} - V \cdot \bar{U}_{\gamma} - \bar{U}_{\alpha} \cdot \Phi;$$

$$\tilde{U}_d^{s+1/2} = \left( \bar{\Phi} \cdot \bar{U}_d^{s+1/2} + M^{s+1/2} \right) \cdot \bar{\Psi}^{-1},$$

$$\bar{\Phi} = E \cdot I + L \cdot \hat{U}_{\alpha} + Y \cdot \hat{U}_{\gamma}, \quad \bar{\Psi} = C \cdot I - B \cdot \bar{U}_{\alpha} - V \cdot \bar{U}_{\gamma} - \bar{U}_{\gamma} \cdot \bar{\Phi};$$

$$\hat{U}_{\beta}^{*,s+1/2} = \left( \hat{\Phi} \cdot \bar{U}_{\beta}^{s+1/2} + \hat{M}^{s+1/2} \right) \cdot \hat{\Psi}^{-1},$$

$$\begin{aligned}
\hat{M}^{s+1/2} &= L \cdot \tilde{U}_d^{*,s+1/2} + E \cdot \bar{U}_d^{s+1/2} + Y \cdot \hat{U}_d^{*,s} + A \cdot \tilde{U}_{\beta}^{*,s+1/2} + K \cdot \bar{U}_{\beta}^{s+1/2} + \\
&\quad + D \cdot \hat{U}_{\beta}^{*,s} + F,
\end{aligned}$$

$$\hat{\Phi} = B \cdot I + A \cdot \tilde{U}_{\alpha} + L \cdot \tilde{U}_{\gamma}, \quad \hat{\Psi} = C \cdot I - K \cdot \bar{U}_{\alpha} - E \cdot \bar{U}_{\gamma} - \bar{U}_{\alpha} \cdot \hat{\Phi};$$

$$\bar{U}_{\beta}^{s+1} = \left( \Phi \cdot \bar{U}_{\beta}^{s+1} + M^{s+1} \right) \cdot \Psi^{-1},$$

$$\begin{aligned}
M^{s+1} &= D \cdot \tilde{U}_d^{s+1} + V \cdot \bar{U}_d^{s+1} + Y \cdot \hat{U}_d^{s+1} + A \cdot \tilde{U}_{\beta}^{s+1/2} + B \cdot \bar{U}_{\beta}^{s+1/2} + \\
&\quad + L \cdot \hat{U}_{\beta}^{s+1/2} + F,
\end{aligned}$$

$$\tilde{U}_d^{s+1} = \left( \bar{\Phi} \cdot \bar{U}_d^{s+1} + M^{s+1} \right) \cdot \bar{\Psi}^{-1},$$

$$\tilde{U}_d^{*,s+1} = (\overline{\Phi} \cdot \overline{U}_d^{s+1} + \hat{M}^{s+1}) \cdot \overline{\Psi}^{-1},$$

$$\hat{M}^{s+1} = L \cdot \tilde{U}_d^{*,s+1/2} + E \cdot \overline{U}_d^{s+1} + Y \cdot \hat{U}_d^{*,s+1} + A \cdot \tilde{U}_\beta^{*,s+1/2} + K \cdot \overline{U}_\beta^{s+1} + D \cdot \hat{U}_\beta^{*,s+1} + F,$$

$$\overline{\Phi} = V \cdot I + D \cdot \hat{U}_\alpha + Y \cdot \hat{U}_\gamma, \quad \overline{\Psi} = C \cdot I - K \cdot \overline{U}_\alpha - E \cdot \overline{U}_\gamma - \overline{U}_\gamma \cdot \overline{\Phi}.$$

Структура используемых матриц представлена на рис.1, причем линиями указаны те строки и столбцы полных матриц коэффициентов, которые необходимо убирать при определении подматриц.

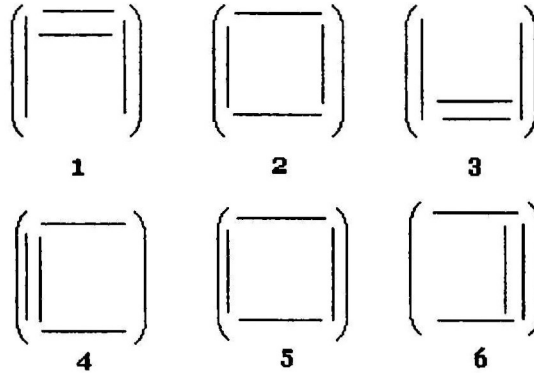


Рис. 1. Схема образования матриц  
(1 -  $\hat{U}$ , 2 -  $\overline{U}$ , 3 -  $\tilde{U}$ , 4 -  $\hat{U}^*$ , 5 -  $\overline{U}^*$ , 6 -  $\tilde{U}^*$ )

Полное теоретическое доказательство сходимости " $\alpha - \beta$ " алгоритма в литературе отсутствует. Для его проведения вышеуказанные матричные варианты  $\alpha -$  и  $\beta -$  процессов приводятся к каноническому виду:

$$B_s \frac{\tilde{U}_\alpha^{s+1} - \tilde{U}_\alpha^{s+1/2}}{\tau_s} + A_s \tilde{U}_\alpha^{s+1/2} = F_s,$$

$$B_s \frac{\tilde{U}_\beta^{s+1} - \tilde{U}_\beta^{s+1/2}}{\tau_s} + A_s \tilde{U}_\beta^{s+1/2} = F_s, \quad (7)$$

с начальными условиями



$$\bar{U}_{\alpha}^{(0)} = 0, \bar{U}_{\beta,k}^{(0)} = \begin{cases} U_0, & k = 1 \\ U_{\beta,k-1}, & k \geq 2 \end{cases}.$$

**Теорема 1.** Пусть матрица системы (3) обладает свойством диагонального преобладания и выполнено неравенство  $C \geq V + K + E + B$ , где  $V \geq 0, C \geq 0, K \geq 0, E \geq 0, B \geq 0, A \geq 0$ , а  $A = Y = -L = -D$ . Пусть для любого  $s \geq 0$   $|\alpha_{2,n}^{(s)}| \leq 1$ ,  $|\gamma_{N-1,n}^{(s)}| \leq 1$ ,  $|\bar{\alpha}_{i,2}^{(s+1/2)}| \leq 1$ ,  $|\bar{\gamma}_{i,N-1}^{(s)}| \leq 1$ ,  $|\varphi_{2,n}| \leq 1$ ,  $|\varphi_{N-1,n}| \leq 1$ ,  $|\varphi_{i,2}| \leq 1$ ,  $|\varphi_{i,N-1}| \leq 1$  и  $|\xi_{2,n}| \leq T_e$ ,  $|\xi_{N-1,n}| \leq T_e$ ,  $|\xi_{i,2}| \leq T_e$ ,  $|\xi_{i,N-1}| \leq T_e$ , где  $T_e = \text{const} > 0$ . Пусть  $f(x, y, t)$  ограничена в области  $G = (0, a) \times (0, b)$ , т.е. существует константа  $\bar{F} \in R_+$ , что  $|f(x, y, z, t)| \leq \bar{F}$  для каждого элемента из  $G$  при любом фиксированном значении  $t$ . Тогда « $\alpha - \beta$ » процесс сходится, причем  $\alpha$  – процесс будет устойчивым.

В третьей главе представлены результаты исследования построенного автором алгоритма нелинейных итераций прогоночных коэффициентов, являющегося обобщением известного метода "α – β" итераций, использованного для решения нестационарной краевой задачи теплопроводности в трехмерной анизотропной области. Приводится его запись в матричном виде, решается вопрос о доказательстве сходимости. При этом уравнение

$$\begin{aligned} \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = & k_{11} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2 \cdot k_{12} \cdot \frac{\partial T}{\partial x \partial y} + 2 \cdot k_{13} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} + k_{22} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \\ & + 2 \cdot k_{23} \cdot \frac{\partial T}{\partial y \partial z} + k_{33} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + f(x, y, z, t), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\left( k_{11} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + k_{12} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + k_{13} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big|_{x=0} = \gamma_1 (T - T_e),$$

$$\left( k_{11} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + k_{12} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + k_{13} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big|_{x=a} = \gamma_2 (T_e - T),$$

$$\left( k_{12} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + k_{22} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + k_{23} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big|_{y=0} = \gamma_3 (T - T_e),$$

$$\begin{aligned}
\left( k_{12} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + k_{22} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + k_{23} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big|_{y=b} &= \gamma_4 (T_e - T), \\
\left( k_{13} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + k_{23} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + k_{33} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} &= \gamma_5 (T - T_e), \\
\left( k_{13} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + k_{23} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + k_{33} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big|_{z=c} &= \gamma_6 (T_e - T), \\
T|_{t=0} &= u_0(x, y, z),
\end{aligned} \tag{9}$$

где  $T(x, y, z, t) \in C^2(\bar{U}_{[0,M]}) \cap C^1(\bar{U}_{[0,M]})$ ,  $U_{[0,M]} = G \times [0, M]$ ,  $G = (0, a) \times (0, b) \times (0, c)$ ,  $k_{i,j}$ ,  $i = \overline{1,3}$ ;  $j = \overline{1,3}$  – коэффициенты тензора теплопроводности, удовлетворяющие условиям параболичности: а)  $k_{11} \geq 0$ ; б)  $k_{11}k_{22} - k_{12}^2 \geq 0$ ; в)  $k_{11}k_{22}k_{33} + 2k_{12}k_{23}k_{13} - k_{33}k_{12}^2 - k_{11}k_{23}^2 - k_{22}k_{13}^2 \geq 0$ ,  $\rho$  – плотность;  $c_p$  – изобарная теплоемкость;  $T_e$  – температура внешней среды;  $\gamma_i$ ,  $i = \overline{1,6}$ , – коэффициенты теплоотдачи;  $T$  – температура, представляется в виде:

$$\begin{aligned}
&A_1 U_{i-1,n-1,k-1}^j + B_1 U_{i-1,n,k-1}^j + E_1 U_{i-1,n+1,k-1}^j + D_1 U_{i,n-1,k-1}^j - C_1 U_{i,n,k-1}^j + \\
&+ F_1 U_{i,n+1,k-1}^j + G_1 U_{i+1,n-1,k-1}^j + P_1 U_{i+1,n,k-1}^j + H_1 U_{i+1,n+1,k-1}^j + A_2 U_{i-1,n-1,k}^j + \\
&+ B_2 U_{i-1,n,k}^j + E_2 U_{i-1,n+1,k}^j + D_2 U_{i,n-1,k}^j - C_2 U_{i,n,k}^j + F_2 U_{i,n+1,k}^j + \\
&+ G_2 U_{i+1,n-1,k}^j + P_2 U_{i+1,n,k}^j + H_2 U_{i+1,n+1,k}^j + A_3 U_{i-1,n-1,k+1}^j + B_3 U_{i-1,n,k+1}^j + \\
&+ E_3 U_{i-1,n+1,k+1}^j + D_3 U_{i,n-1,k+1}^j - C_3 U_{i,n,k+1}^j + F_3 U_{i,n+1,k+1}^j + G_3 U_{i+1,n-1,k+1}^j + \\
&+ P_3 U_{i+1,n,k+1}^j + H_3 U_{i+1,n+1,k+1}^j + Q_{i,n,k}^{j-1} = 0,
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
&A_1 = 0; B_1 = k_{13}/(2h_1h_3); E_1 = 0; D_1 = k_{23}/(2h_2h_3); C_1 = k_{33}/h_3^2; G_1 = 0; \\
&F_1 = -D_1; P_1 = -B_1; E_2 = -k_{12}/(2h_1h_2); H_1 = 0; B_3 = -B_1; E_3 = 0; \\
&A_2 = k_{12}/(2h_1h_2); B_2 = -k_{11}/h_1^2; D_2 = -k_{22}/h_2^2; F_2 = -k_{22}/h_2^2; \\
&C_2 = 2 \cdot [B_2 + D_2 - C_1] - \rho \cdot c_p / \tau; A_3 = 0; D_3 = F_1; C_3 = C_1; F_3 = D_1; \\
&G_2 = -k_{12}/(2h_1h_2); P_2 = B_2; H_2 = -G_2; G_3 = 0; P_3 = -P_1; H_3 = 0; \\
&Q_{i,n,k}^{j-1} = f_{i,n}^{k,j} + \rho \cdot c_p \cdot T_{i,n}^{k,j-1} / \tau; U_{i,n,k} \equiv T(x_i, y_n, z_k, t_{j+1}); \tau = M \cdot M_1^{-1},
\end{aligned}$$

$h_1 = a \cdot N^{-1}$ ,  $h_2 = b \cdot N^{-1}$ ,  $h_3 = c \cdot N^{-1}$ ;  $i = \overline{2, N-1}$ ,  $n = \overline{2, N-1}$ ,  
 $k = \overline{2, N-1}$ ,  $j = \overline{1, M_1}$ ,  $\tau$  – шаг по времени.

Разностное уравнение (10) дополняется граничными условиями, полученными аппроксимацией (9) с первым порядком:

$$\begin{aligned} U_{1,n,k}^j &= \varphi_{2,n,k} U_{2,n,k}^j + \xi_{2,n,k}, \quad U_{i,1,k}^j = \varphi_{i,2,k} U_{i,2,k}^j + \xi_{i,2,k}, \\ U_{N,n,k}^j &= \varphi_{N-1,n,k} U_{N-1,n,k}^j + \xi_{N-1,n,k}, \quad U_{i,N,k}^j = \varphi_{i,N-1,k} U_{i,N-1,k}^j + \xi_{i,N-1,k}, \\ U_{i,n,1}^j &= \varphi_{i,n,2} U_{i,n,2}^j + \xi_{i,n,2}, \quad U_{i,n,N}^j = \varphi_{i,n,N-1} U_{i,n,N-1}^j + \xi_{i,n,N-1}, \end{aligned} \quad (11)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \xi_{2,n,k} &= \tilde{\varphi}_{1,n+1,k} U_{1,n+1,k}^j + \tilde{\varphi}_{1,n,k+1} U_{1,n,k+1}^j + \tilde{\xi}_{2,n,k}, \\ \xi_{i,2,k} &= \tilde{\varphi}_{i+1,1,k} U_{i+1,1,k}^j + \tilde{\varphi}_{i,1,k+1} U_{i,1,k+1}^j + \tilde{\xi}_{i,2,k}, \\ \xi_{i,n,2} &= \tilde{\varphi}_{i+1,n,1} U_{i+1,n,1}^j + \tilde{\varphi}_{i,n+1,1} U_{i,n+1,1}^j + \tilde{\xi}_{i,n,2}, \\ \xi_{N-1,n,k} &= \tilde{\varphi}_{N,n-1,k} U_{N,n-1,k}^j + \tilde{\varphi}_{N,n,k-1} U_{N,n,k-1}^j + \tilde{\xi}_{N-1,n,k}, \\ \xi_{i,N-1,k} &= \tilde{\varphi}_{i-1,N,k} U_{i-1,N,k}^j + \tilde{\varphi}_{i,N,k-1} U_{i,N,k-1}^j + \tilde{\xi}_{i,N-1,k}, \\ \xi_{i,n,N-1} &= \tilde{\varphi}_{i-1,n,N} U_{i-1,n,N}^j + \tilde{\varphi}_{i,n-1,N} U_{i,n-1,N}^j + \tilde{\xi}_{i,n,N-1}. \end{aligned}$$

Сеточные функции  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{\xi}$  известны и определены только на границе.

Формулы итерационного алгоритма получены после применения к (10)–(11) формул правой и левой прогонки

$$\begin{aligned} U_{i,n,k}^j &= \alpha_{i+1,n,k} U_{i+1,n,k}^j + \beta_{i+1,n,k}, \quad U_{i,n,k}^j = \tilde{\alpha}_{i,n+1,k} U_{i,n+1,k}^j + \tilde{\beta}_{i,n+1,k}, \\ U_{i,n,k}^j &= \delta_{i,n,k+1} U_{i,n,k+1}^j + \eta_{i,n,k+1}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} U_{i,n,k}^j &= \gamma_{i-1,n,k} U_{i-1,n,k}^j + d_{i-1,n,k}, \quad U_{i,n,k}^j = \tilde{\gamma}_{i,n-1,k} U_{i,n-1,k}^j + \tilde{d}_{i,n-1,k}, \\ U_{i,n,k}^j &= \nu_{i,n,k-1} U_{i,n,k-1}^j + \varsigma_{i,n,k-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Для того чтобы воспользоваться граничными условиями (11) в ходе выполнения итераций, необходимо преобразовать их с помощью соотношений (12), (13). В результате в (11) будут входить  $\alpha_{i,n,k}$ ,  $\gamma_{i,n,k}$ ,  $\tilde{\alpha}_{i,n,k}$ ,  $\tilde{\gamma}_{i,n,k}$ ,  $\delta_{i,n,k}$ ,  $\nu_{i,n,k}$ ,  $\beta_{i,n,k}$ ,  $\tilde{\beta}_{i,n,k}$ ,  $d_{i,n,k}$ ,  $\tilde{d}_{i,n,k}$ ,  $\eta_{i,n,k}$ ,  $\varsigma_{i,n,k}$ , взятые на определенной итерации, но расчеты будут осуществляться по явным формулам.

Аналогично двумерному " $\alpha - \beta$ " алгоритму, имеет место особенность, связанная с вычислением неизвестных прогоночных коэффициентов вблизи границы. Как и ранее, она решается путем проведения преобразования разностного уравнения (10).

Далее осуществляется запись обобщенного метода « $\alpha - \beta$ » итераций в матричном виде для случая 19-точечного шаблона и доказывается его сходимость. При этом его можно разделить на две автономных части:

#### « $\alpha$ – процесс»

$$U_{\alpha}^{(0)} = 0; U_{\bar{\alpha}}^{(0)} = 0; U_{\gamma}^{(0)} = 0; U_{\bar{\gamma}}^{(0)} = 0; U_{\delta}^{(0)} = 0; U_{\bar{\nu}}^{(0)} = 0;$$

$$\bar{U}_{\alpha}^{s+1/2} = -\bar{\Psi}_1^{s+1/2} \cdot [\bar{\Psi}_2^{s+1/2} + \bar{U}_{\alpha}^{s+1/2} \cdot \bar{\Psi}_3^{s+1/2}]^{-1},$$

$$\bar{U}_{\gamma}^{s+1/2} = -\bar{\Psi}_3^{s+1/2} [\bar{\Psi}_2^{s+1/2} + \bar{U}_{\gamma}^{s+1/2} \cdot \bar{\Psi}_1^{s+1/2}]^{-1},$$

$$\bar{U}_{\bar{\alpha}}^{*,s+1/2} = -\bar{\Psi}_1^{s+1/2} [\bar{\Psi}_2^{s+1/2} + \bar{U}_{\bar{\alpha}}^{s+1/2} \cdot \bar{\Psi}_3^{s+1/2}]^{-1},$$

$$\bar{U}_{\bar{\gamma}}^{*,s+1/2} = -\bar{\Psi}_3^{s+1/2} [\bar{\Psi}_2^{s+1/2} + \bar{U}_{\bar{\gamma}}^{s+1/2} \cdot \bar{\Psi}_1^{s+1/2}]^{-1},$$

$$\bar{U}_{\delta, \cdot}^{s+1/2} = -\Psi_1^s [\Psi_2^{s+1/2} + \bar{U}_{\delta}^{s+1/2} \cdot \Psi_3^{s+1/2}]^{-1}, k = \overline{2, N-1};$$

$$\bar{U}_{\alpha}^{s+1} = -\bar{\Psi}_1^{s+1} \cdot [\bar{\Psi}_2^{s+1} + \bar{U}_{\alpha}^{s+1} \cdot \bar{\Psi}_3^{s+1}]^{-1},$$

$$\bar{U}_{\gamma}^{s+1} = -\bar{\Psi}_3^{s+1} [\bar{\Psi}_2^{s+1} + \bar{U}_{\gamma}^{s+1} \cdot \bar{\Psi}_1^{s+1}]^{-1},$$

$$\bar{U}_{\bar{\alpha}}^{*,s+1} = -\bar{\Psi}_1^{s+1} [\bar{\Psi}_2^{s+1} + \bar{U}_{\bar{\alpha}}^{s+1} \cdot \bar{\Psi}_3^{s+1}]^{-1},$$

$$\bar{U}_{\bar{\gamma}}^{*,s+1} = -\bar{\Psi}_3^{s+1} [\bar{\Psi}_2^{s+1} + \bar{U}_{\bar{\gamma}}^{s+1} \cdot \bar{\Psi}_1^{s+1}]^{-1},$$

$$\bar{U}_{\bar{\nu}, \cdot}^{s+1} = -\Psi_3^{s+1} [\Psi_2^{s+1} + \bar{U}_{\bar{\nu}}^{s+1} \cdot \Psi_1^{s+1}]^{-1}, k = \overline{N-1, 2};$$

#### « $\beta$ – процесс»

$$U_{\beta}^{(0),j} = \begin{cases} U_0, & j=1 \\ U_{\beta}^{j-1}, & j \geq 2 \end{cases}, \quad U_{\tilde{\beta}}^{(0),j} = \begin{cases} U_0, & j=1 \\ U_{\tilde{\beta}}^{j-1}, & j \geq 2 \end{cases},$$

$$U_d^{(0),j} = \begin{cases} U_0, & j=1 \\ U_d^{j-1}, & j \geq 2 \end{cases}, \quad U_{\tilde{d}}^{(0),j} = \begin{cases} U_0, & j=1 \\ U_{\tilde{d}}^{j-1}, & j \geq 2 \end{cases},$$

$$U_{\eta}^{(0),j} = \begin{cases} U_0, & j=1 \\ U_{\eta}^{j-1}, & j \geq 2 \end{cases}, \quad U_{\zeta}^{(0),j} = \begin{cases} U_0, & j=1 \\ U_{\zeta}^{j-1}, & j \geq 2 \end{cases},$$

$$\bar{U}_{\beta}^{s+1/2} = -(\tilde{\Psi}_3 \cdot \bar{U}_{\beta}^{s+1/2} + \tilde{\Phi}^{s+1/2}) \cdot (\tilde{\Psi}_2 + \tilde{\Psi}_3 \cdot \bar{U}_{\alpha})^{-1},$$

$$\bar{U}_d^{s+1/2} = -(\tilde{\Psi}_1 \cdot \bar{U}_d^{s+1/2} + \tilde{\Phi}^{s+1/2}) \cdot (\tilde{\Psi}_2 + \bar{U}_{\gamma} \cdot \tilde{\Psi}_1)^{-1},$$

$$\bar{U}_{\tilde{\beta}}^{*,s+1/2} = -(\bar{\Psi}_3 \cdot \bar{U}_{\tilde{\beta}}^{s+1/2} + \bar{\Phi}^{s+1/2}) \cdot (\bar{\Psi}_2 + \bar{\Psi}_3 \cdot \bar{U}_{\tilde{\alpha}})^{-1},$$

$$\bar{U}_{\tilde{d}}^{*,s+1/2} = -(\bar{\Psi}_1 \cdot \bar{U}_{\tilde{d}}^{s+1/2} + \bar{\Phi}^{s+1/2}) \cdot (\bar{\Psi}_2 + \bar{\Psi}_1 \cdot \bar{U}_{\tilde{\gamma}})^{-1},$$

$$\bar{U}_{\eta}^{*,s+1/2} = -(\Psi_3 \cdot \bar{U}_{\eta}^{s+1/2} + \Phi^s) \cdot (\Psi_2 + \Psi_3 \cdot \bar{U}_{\delta})^{-1}, \quad k = \overline{2, N-1};$$

$$\bar{U}_{\beta}^{s+1} = -(\tilde{\Psi}_3 \bar{U}_{\beta}^{s+1} + \tilde{\Phi}^{s+1}) \cdot (\tilde{\Psi}_2 + \tilde{\Psi}_3 \cdot \bar{U}_{\alpha})^{-1},$$

$$\bar{U}_d^{s+1} = -(\tilde{\Psi}_1 \cdot \bar{U}_d^{s+1} + \tilde{\Phi}^{s+1}) \cdot (\tilde{\Psi}_2 + \bar{U}_{\gamma} \cdot \tilde{\Psi}_1)^{-1},$$

$$\bar{U}_{\tilde{\beta}}^{*,s+1} = -(\bar{\Psi}_3 \cdot \bar{U}_{\tilde{\beta}}^{s+1} + \bar{\Phi}^{s+1}) \cdot (\bar{\Psi}_2 + \bar{\Psi}_3 \cdot \bar{U}_{\tilde{\alpha}})^{-1},$$

$$\bar{U}_{\tilde{d}}^{*,s+1} = -(\bar{\Psi}_1 \cdot \bar{U}_{\tilde{d}}^{s+1} + \bar{\Phi}^{s+1}) \cdot (\bar{\Psi}_2 + \bar{\Psi}_1 \cdot \bar{U}_{\tilde{\gamma}})^{-1},$$

$$\bar{U}_{\zeta}^{*,s+1} = -(\Psi_1 \cdot \bar{U}_{\zeta}^{s+1} + \Phi^{s+1/2}) \cdot (\Psi_2 + \Psi_1 \cdot \bar{U}_{\nu})^{-1}, \quad k = \overline{N-1, 2}.$$

Построение матриц итерационного алгоритма происходило по аналогии с двумерным случаем.

Отметим, что в отличие от обычного условие диагонального преобладания матрицы системы (10) будет следующим:

$$1) |C_2| \geq |B_1| + |D_1| + |C_1| + |F_1| + |P_1| + |A_2| + |B_2| + |E_2| + |D_2| + |F_2| +$$

$$\begin{aligned}
& +|G_2|+|P_2|+|H_2|+|B_3|+|D_3|+|C_3|+|F_3|+|P_3|; \\
2) & |B_2| \geq |B_3|+|E_2|+|A_2|+|B_1|; \quad 3) |C_1| \geq |F_1|+|B_1|+|P_1|+|D_1|; \\
4) & |C_2| \geq |F_2|+|B_2|+|P_2|+|D_2|; \quad 5) |C_3| \geq |F_3|+|B_3|+|P_3|+|D_3|; \\
6) & |C_2| \geq |C_3|+|D_2|+|F_2|+|C_1|; \quad 7) |P_2| \geq |P_3|+|G_2|+|H_2|+|P_1|; \\
8) & |D_2| \geq |D_3|+|G_2|+|A_2|+|D_1|; \quad 9) |C_2| \geq |C_3|+|B_2|+|P_2|+|C_1|; \\
10) & |F_2| \geq |F_3|+|E_2|+|H_2|+|F_1|. \quad (14)
\end{aligned}$$

**Теорема 2.** Пусть матрица системы (10) обладает свойством диагонального преобладания и выполнены неравенства (14). Пусть  $C_1 = C_3; B_2 = P_2; D_2 = F_2; A_2 = -E_2 = -G_2 = H_2; B_1 = -P_1 = -B_3 = P_3; D_1 = -F_1 = -D_3 = F_3$ , где  $C_1 > 0, B_2 < 0, D_2 < 0, A_2 > 0, B_1 > 0,$

$D_1 > 0$ . Пусть для каждого  $s \geq 0$   $|\alpha_{2,n,k}^{(s)}| \leq 1, |\gamma_{N-1,n,k}^{(s)}| \leq 1, |\tilde{\alpha}_{i,2,k}^{(s)}| \leq 1, |\tilde{\gamma}_{i,n-1,k}^{(s)}| \leq 1, |\delta_{i,n,2}^{(s+1/2)}| \leq 1, |\nu_{i,n,N-1}^{(s)}| \leq 1, |\alpha_{2,n,k}^{(s)}| \leq 1, |\gamma_{N-1,n,k}^{(s)}| \leq 1, |\tilde{\alpha}_{i,2,k}^{(s)}| \leq 1, |\tilde{\gamma}_{i,n-1,k}^{(s)}| \leq 1, |\delta_{i,n,2}^{(s+1/2)}| \leq 1, |\nu_{i,n,N-1}^{(s)}| \leq 1, |\xi_{2,n,k}| \leq T_e, |\xi_{N-1,n,k}| \leq T_e, |\xi_{i,2,k}| \leq T_e, |\xi_{i,N-1,k}| \leq T_e, |\xi_{i,n,2}| \leq T_e, |\xi_{i,n,N-1}| \leq T_e$ , где  $T_e = \text{const} \geq 0$ . Пусть  $f(x, y, z, t)$  ограничена в области  $G = (0, a) \times (0, b) \times (0, c)$ , т.е. существует константа  $F \in R_+$ , что  $|f(x, y, z, t)| \leq F$  для любого элемента  $G$  при фиксированном значении  $t$ . Тогда « $\alpha - \beta$ » процесс сходится.

В четвертой главе представлены результаты численных расчетов двумерного и трехмерного параболического уравнения общего вида. С помощью полученных данных проводится сравнительный анализ двумерного неявного нелинейного итерационного « $\alpha - \beta$ » процесса с другими итерационными алгоритмами и прямыми методами. Так же осуществляется сравнение « $\alpha - \beta$ » алгоритма с трехмерным явным методом Булеева (ЯМБ-3).

При сопоставлении данных численного интегрирования тестовых задач для уравнения (1), (2) следует, что у методов неполной факторизации (МНФ), таких как ЯМБ-2, НМБ-2, модифицированного попеременно-треугольного метода и др., и модифицированного (двумерного) « $\alpha - \beta$ » алгоритма скорость

сходимости  $R$  с ростом неоднородности области  $G$  возрастает. Однако такое свойство характерно лишь для ограниченного числа итерационных процессов. Например, для метода простой итераций, явного чебышевского метода, методов вариационного типа и многих других оно не выполняется.

Чтобы оценить скорость сходимости модифицированного « $\alpha - \beta$ » алгоритма, было проведено 96 численных расчетов (3 серии по 32 расчёта) задачи (1)–(2), где  $f = 0$ ,  $k_{12} = 0$ ,  $\Theta = 1$ ,  $k_{11} = 1000$  Вт/м·К,  $k_{22} = 10$  Вт/м·К,  $a = 0,05$  м,  $b = 0,05$  м,  $T_e = 1000$  К,  $u_0 = 300$  К,  $\rho = 1700$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_p = 670$  Дж/кг·К,  $T|_{\partial G} = T_e$ , с различными значениями степени анизотропии  $\sigma$  ( $\sigma=1$ ,  $\sigma=100$ ,  $\sigma=10000$ ) и различным числом узлов сетки  $N$  ( $N = 8, 16, 24, 32 \dots 256$ ). На основе полученных данных о количестве итераций  $s$  на отрезке  $N \in [0, 256]$  были построены три кубических сплайна дефекта 1 вида:

$$\bar{s}_i^j(N_i) = A_i^j + B_i^j N_i + C_i^j N_i^2 + D_i^j N_i^3, \quad i = \overline{1, 32}, j = 1, 2, 3,$$

с дополнительными условиями  $\bar{s}_i^{*j}(0) = 0, \bar{s}_i^{*j}(256) = 0, \quad j = 1, 2, 3$ .

Показано, что сплайны  $\bar{s}^j(N)$ , составленные из  $\bar{s}_i^j(N)$ ,  $i = \overline{1, 32}, j = 1, 2, 3$  близки к функциям  $s_1(N) = N^{6/7}$ ,  $s_2(N) = N^{2/3}$  и  $s_3(N) = 1,8 \cdot \ln(N+1)$ , т.е. выполнены приближенные равенства:

$$\bar{s}^1(N) \sim s_1(N), \bar{s}^2(N) \sim s_2(N), \bar{s}^3(N) \sim s_3(N).$$

При этом справедлива следующая оценка:

$$\left\| s_j(N) - \bar{s}^j(N) \right\|_{C[0, 256]} \leq \max_{N \in [0, 256]} \left| s_j^{IV}(N) \right| \cdot h^4,$$

где  $h = 8, j = 1, 2, 3$ .

Так как  $R = R(s, N) = O(s^{-1})$ , то эмпирическая скорость сходимости при степенях анизотропии  $\sigma=1$ ,  $\sigma=100$ ,  $\sigma=10000$  для задачи (1), (2) при  $t = 0,2$  с будет равна  $R = O(N^{-6/7}), R = O(N^{-2/3})$

и  $R = O\left(\frac{1}{1,8 \cdot \ln N}\right)$  соответственно. С течением времени  $t$  величина

параметра  $s$  уменьшается, поэтому реальная скорость  $R = R(s, N, t)$  может быть выше.

Увеличение скорости сходимости с ростом  $\sigma$  наблюдается и у других итерационных алгоритмов. Как и « $\alpha - \beta$ » алгоритм, высокой скоростью сходимости обладают и методы неполной факторизации (ЯМБ-2, НМБ-2, попеременно-треугольный метод), однако в отличие от « $\alpha - \beta$ » процесса им присущи и некоторые недостатки: необходимость определения релаксационного параметра путем многократно повторяющихся расчетов исходной задачи, потребность в изучении спектра разностного оператора, замедление сходимости с ростом неоднородности области и другие.

Обобщенный « $\alpha - \beta$ » процесс обладает такими же свойствами, что и его двумерный вариант. Проведенные расчеты тестовых задач показывают его высокую эффективность для решения трехмерных существенно анизотропных ( $10 \leq \sigma \leq 200$ ) уравнений параболического типа общего вида. Более того, наблюдались эффекты и свойства тепловых полей, которые характерны анизотропным материалам и известны в литературе, что позволяет судить об адекватности построенного итерационного процесса, а так же о соответствии действительности результатов, получаемых с его помощью.

В работе получены следующие основные результаты:

1. Построены нестационарные нелинейные итерационные процессы, учитывающие наличие на границе внешней нормальной производной от функции температуры. Двумерный алгоритм является модификацией известного в литературе стационарного метода « $\alpha - \beta$ » итераций. Трехмерный итерационный процесс является его обобщением.
2. На основе записи итерационных процессов в векторно-матричной форме и сведения их к каноническому виду получены условия и доказаны теоремы, гарантирующие устойчивость и сходимость алгоритмов.
3. Анализ методов вариационного типа, неполной факторизации и « $\alpha - \beta$ » алгоритмов показал, что по сравнению с первыми неявными методами нелинейных итераций дают существенный выигрыш в скорости сходимости, но проигрывают по



количеству арифметических операций, затрачиваемых на одну итерацию. Тем не менее, по сравнению с другими итерационными процессами общее время расчета двухмерной краевой задачи анизотропной теплопроводности сократилось более чем в 1,2 раза, а трехмерной – более чем в два раза.

4. Показано, что применение двух- и трехмерных " $\alpha - \beta$ " процессов для численного интегрирования параболических уравнений, дополненных краевыми условиями третьего рода, высокоэффективно для областей со степенью анизотропии  $10 \leq \sigma \leq 200$ .

В приложении I приведены формулы явного и неявного метода Булеева для двух- и трехмерного уравнения Пуассона.

В приложении II приведен акт внедрения двух- и трехмерного алгоритма нелинейных итераций прогоночных коэффициентов в ООО «Экофизика–Томск».

Основные результаты диссертационной работы представлены в следующих публикациях автора:

1. Берцун В.Н., Крицкий О.Л. К вопросу о математическом моделировании тепловых полей в средах с анизотропной теплопроводностью// Математическое моделирование и теория вероятностей. Томск: Пеленг, 1998, с. 12-19.
2. Крицкий О.Л. Численное исследование температурных полей в анизотропных областях// Исследования по баллистике и смежным вопросам механики: Сборник статей. Томск: издательство ТГУ, 1999, вып. 3, с. 73-75.
3. Крицкий О.Л. Применение « $\alpha - \beta$ » алгоритма для решения двумерных нестационарных задач анизотропной теплопроводности// Исследования по баллистике и смежным вопросам механики: Сборник статей. Томск: издательство ТГУ, 1999, вып. 3, с. 75-77.
4. Бураков В.А., Берцун В.Н., Крицкий О.Л. Сравнительный анализ численных методов решения нестационарной задачи анизотропной теплопроводности // Тепломассообмен. ММФ-2000. Минск: АНК ИТМО им. А.В. Лыкова НАНБ, 2000, т.3, с. 275-279.
5. Крицкий О.Л. Анализ итерационных методов решения многомерных анизотропных краевых задач// Моделирование

- неравновесных систем. Красноярск: издательство ИПЦ КГТУ, 2000, с. 134-136.
6. Крицкий О.Л. Применение итерационного метода продольно-поперечных прогонок для решения двумерного параболического уравнения общего вида// Депонировано в ВИНТИ, №3287–В00, 12 с.
  7. Крицкий О.Л. Применение прямых методов при численном интегрировании многомерных параболических уравнений общего вида// Исследования по баллистике и смежным вопросам механики. Томск: издательство ТГУ, 2001, вып. 4, с. 61-65.
  8. Крицкий О.Л., Касперский А.А. Итерационные методы решения параболических уравнений со смешанными производными// Исследования по баллистике и смежным вопросам механики. Томск: издательство ТГУ, 2001, вып. 4, с. 59-61.
  9. Крицкий О.Л. Применение метода нелинейных итераций прогоночных коэффициентов для решения многомерного параболического уравнения в анизотропных областях// Труды конференции, посвященной 10-летию ИВТ СО РАН. Новосибирск: издательство ИВТ СО РАН, 2001, т. II, с. 88–92.
  10. Крицкий О.Л. Численные методы решения трехмерной нестационарной краевой задачи анизотропной теплопроводности// Математические модели и методы их исследования. Красноярск: изд-во ИВМ СО РАН, 2001, т.2, с.34-38.

Отпечатано на участке оперативной полиграфии  
Редакционно-издательского отдела ТГУ  
Лицензия ПД № 00208 от 20 декабря 1999 г.

---

Заказ № \_\_\_\_ «02» 10 2001 г. Тираж 100 экз.

2-